

(Print) ISSN 1439–8222

(Internet) ISSN 1439–8303

Nummer/Number 10

Auflage/Edition 2

---

# Berichte zur Umweltphysik

## *Reports on Environmental Physics*

---

Vorschrift zur Berechnung der  
Abgasfahnenüberhöhung  
von Schornsteinen und Kühltürmen

*Specification of the calculation of plume rise for  
stacks and cooling towers*

Ulf Janicke

Juni 2019



Ingenieurbüro Janicke, Hermann-Hoch-Weg 1, 88662 Überlingen, Germany

Autoren/*Authors* :

Dr. Ulf Janicke  
Ing.-Büro Janicke  
Hermann-Hoch-Weg 1  
D-88662 Überlingen  
(Email [uj@janicke.de](mailto:uj@janicke.de))

1. Edition: September 2017

2. Edition: Juni 2019 (modifizierte Umgebungsfeuchte und Abbruchkriterium, neuer Anhang)

**Berichte zur Umweltphysik (Print), ISSN 1439–8222**

**Berichte zur Umweltphysik (Internet), ISSN 1439–8303**

Herausgeber:

Ingenieurbüro Janicke  
Hermann-Hoch-Weg 1, 88662 Überlingen  
Deutschland  
Internet: [www.janicke.de](http://www.janicke.de)

Publisher:

Janicke Consulting  
Hermann-Hoch-Weg 1, 88662 Überlingen  
Germany  
Internet: [www.janicke.de](http://www.janicke.de)

Die Berichte dieser Schriftenreihe erscheinen in unregelmäßigen Zeitabständen. Sie werden im Selbstverlag gedruckt und außerdem auf der Internet-Seite [www.janicke.de](http://www.janicke.de) in Form von Pdf-Dateien kostenlos zur Verfügung gestellt. Alle Rechte sind dem Herausgeber vorbehalten.

The reports of this series are published at irregular time intervals and are printed by the publisher. In addition, the reports are made available free of charge in the Internet on page [www.janicke.de](http://www.janicke.de) in form of pdf files. All rights are reserved to the publisher.



# Vorschrift zur Berechnung der Abgasfahnenüberhöhung von Schornsteinen und Kühltürmen

Ulf Janicke

Juni 2019

## Zusammenfassung

Dieser Bericht enthält eine Vorschrift zur Berechnung der Abgasfahnenüberhöhung von Schornsteinen und Kühltürmen. Die Vorschrift beruht auf dem dreidimensionalen, integralen Fahnenmodell für trockene und feuchte Fahnen *PLURIS* (JANICKE & JANICKE, 2001), auf Zusatzuntersuchungen, die im *Bericht zur Umweltphysik* Nr. 9 (JANICKE ET AL., 2017) erläutert sind, und auf Konventionen. Sie kann zum Beispiel im Rahmen von Ausbreitungsrechnungen mit einem Partikelmodell nach Richtlinie VDI 3945 Blatt 3 (2000) eingesetzt werden.

## Abstract

This report contains a specification of the calculation of plume rise for stacks and cooling towers. The specification is based on the three-dimensional, integral plume rise model for dry and wet plumes *PLURIS* (JANICKE & JANICKE, 2001), on additional studies described in *Report on Environmental Physics* No. 9 (JANICKE ET AL., 2017), and on conventions. It can be used for example in the context of dispersion calculations with a particle model according to the standard VDI 3945 Part 3 (2000).



## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Anwendungsbereich</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Formelzeichen</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Berechnung der Abgasfahnenüberhöhung</b>	<b>7</b>
4.1	Überhöhungsmodell . . . . .	7
4.1.1	Modellgleichungen . . . . .	7
4.1.2	Weitere Festlegungen . . . . .	9
4.2	Meteorologische Profile . . . . .	10
4.3	Endüberhöhung . . . . .	10
4.4	Stacktip downwash . . . . .	12
4.5	Parameter für die Ausbreitungsrechnung . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Fahneninduzierte Turbulenz</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Umrechnungen</b>	<b>14</b>
	<b>Literatur</b>	<b>15</b>
	<b>Anhang</b>	<b>16</b>
<b>A</b>	<b>Vergleich mit dem Indianapolis-Datensatz</b>	<b>16</b>



# 1 Einführung

Die Freisetzung von Schadstoffen aus einem Schornstein oder allgemein aus einer gefassten Quelle erfolgt über Abgase, die meist einen thermischen Auftrieb und mechanischen Aufwärtsimpuls besitzt, so dass die Schadstoffe über die Mündung hinaus nach oben transportiert werden.

Nach der Freisetzung wird hauptsächlich aufgrund der durch den Geschwindigkeitsunterschied zwischen Abgas und Umgebungsströmung erzeugten Turbulenz Umgebungsluft in die Abgasfahne eingemischt, so dass sich Impuls, Temperatur und Feuchte der Fahne immer mehr den Werten der Umgebungsströmung annähern. Die Fahne biegt in Richtung der – in der Regel horizontalen – Umgebungsströmung um und ihr Durchmesser nimmt zu. Wenn sich die Fahneneigenschaften weitgehend denen der Umgebungsluft angenähert haben, wird der weitere Transport hauptsächlich durch die Advektion und Diffusion in der ungestörten Strömung bestimmt.

Anfängliche Fahnedynamik und spätere Ausbreitung in der näherungsweise ungestörten Strömung können im Rahmen einer Ausbreitungsrechnung vereinfacht über das Konzept der Endüberhöhung miteinander verbunden werden. Hierzu wird ein Kriterium festgelegt, wann sich die Fahne nicht mehr signifikant von der Umgebungsluft unterscheidet und die Überhöhung somit formal ihren Endwert erreicht hat. Mit einem Überhöhungsmodell wird dann der Verlauf der Fahnenachse bis zum Erreichen dieser Endüberhöhung bestimmt. Die Ausbreitungsrechnung wird anschließend für die ungestörte Strömung durchgeführt, wobei der zuvor berechnete Verlauf der Fahnenachse parametrisch aufgeprägt wird. Auch die zusätzliche Aufweitung durch die fahneninduzierte Turbulenz kann dabei berücksichtigt werden.

In diesem Bericht wird eine Bestimmungsvorschrift für die Abgasfahnenüberhöhung und ihre Ankopplung an ein Ausbreitungsmodell, insbesondere ein Partikelmodell nach Richtlinie VDI 3945 Blatt 3 (2000), festgelegt. Grundlage sind das Überhöhungsmodell *PLURIS* (JANICKE & JANICKE, 2001) und die im *Bericht zur Umweltphysik* Nr. 9 (JANICKE ET AL., 2017) aufgeführten Untersuchungen. Für allgemeine Grundlagen siehe zum Beispiel BRIGGS (1975) und BAEHR & KABELAK (2012).

Im Gegensatz zu einfachen parametrischen Festlegungen der Abgasfahnenüberhöhung wie in Richtlinie VDI 3782 Blatt 3 (1985) wird der Verlauf der Fahnenachse für frei vorgegebene Profile von Windgeschwindigkeit, Windrichtung, Temperatur und Feuchte – zum Beispiel festgelegt nach Richtlinie VDI 3783 Blatt 8 (2017) – unter Berücksichtigung der kombinierten thermischen und mechanischen Effekte explizit berechnet. Die Berechnung erfolgt numerisch durch Lösung der Differentialgleichungen, die sich aus den Erhaltungssätzen für die über den Fahnenquerschnitt gemittelten Größen ergeben (integrales Fahnenmodell).

Das Verfahren ist für trockene und feuchte Fahnen anwendbar und kann neben Schornsteinen auch für Kühltürme anstelle der Richtlinie VDI 3784 Blatt 2 (1990) eingesetzt werden.



## 2 Anwendungsbereich

Die folgende Vorschrift zur Berechnung der Abgasfahnenüberhöhung beschränkt sich auf die vertikale Ableitung von Abgas aus einer gefassten Quelle wie einem Schornstein oder Kühlturm. Im folgenden wird verkürzt meist nur der Begriff Schornstein verwendet.

Die Austrittsbedingungen und meteorologischen Verhältnisse werden als zeitlich konstant angenommen und es wird der stationäre Verlauf der Fahnenachse bestimmt. Für die Anwendbarkeit sollte die Transportzeit, nach der die Endüberhöhung erreicht wird, kleiner sein als das Mittelungsintervall, auf dem die Austrittsparameter und die meteorologischen Parameter vorgegeben werden.

Das Verfahren ist anwendbar für Zeitintervalle, in denen die Austrittsparameter und meteorologischen Parameter als konstante Werte über einen Mittelungszeitraum von mindestens 5 Minuten vorgegeben werden. Für kleinere Mittelungszeiten ist die Anwendbarkeit zu prüfen. Das Verfahren ist uneingeschränkt anwendbar auf die stationären Situationen einer meteorologischen Ausbreitungsklassenstatistik.

Es wird ein einzelner, einzügiger Schornstein betrachtet. Gegebenenfalls ist zu prüfen, ob mehrere Züge innerhalb eines Schornsteins oder mehrere dicht nebeneinander liegende Schornsteine als ein effektiv einzelner, einzügiger Schornstein behandelt werden können.

Der Effekt des *stacktip downwash* (siehe Abschnitt 4.4) wird berücksichtigt. Einflüsse auf die Fahnenausbreitung durch weitere Schornsteine oder Hindernisse wie Gebäude oder dichter Bewuchs in der Nähe des Schornsteins werden nicht betrachtet. Sie können bei Verwendung eines Partikelmodells in Kombination mit einem geeigneten Windfeldmodell näherungsweise berücksichtigt werden: Die Überhöhung wird durch eine vertikale Zusatzgeschwindigkeit des Partikels modelliert, die der Bewegung des Partikels in dem drei-dimensionalen Windfeld überlagert wird.

Das Abgas kann trocken oder feucht (Wasserdampf und kondensierte Wassertröpfchen) sein. Eingangsgrößen sind die Höhe der Schornsteinmündung, der Innendurchmesser an der Schornsteinmündung und die über den Innendurchmesser gemittelten Werte von Vertikalgeschwindigkeit, Temperatur, spezifischem Wasserdampfgehalt und spezifischem Flüssigwassergehalt des Abgases.

Die Umgebungsluft wird durch vorgegebene Vertikalprofile von Windgeschwindigkeit, Windrichtung und Temperatur am Ort des Schornsteins charakterisiert. Horizontal inhomogene Verhältnisse werden nicht berücksichtigt.

Das Ergebnis der Bestimmungsvorschrift ist die Endüberhöhung der Abgasfahne sowie geeignete Modellparameter (vertikale Zusatzgeschwindigkeit, ihre Varianz und ihre Abklingzeit) für die Ankopplung an ein Partikelmodell nach Richtlinie VDI 3945 Blatt 3 (2000).

Das Überhöhungsmodell *PLURIS* und einige der hier aufgeführten Festlegungen wie das Abbruchkriterium sind im Prinzip auch für Situationen außerhalb des betrachteten Anwendungsbereiches einsetzbar, etwa für nicht-vertikalen Austritt des Abgases.



### 3 Formelzeichen

In diesem Bericht werden folgende Bezeichnungen verwendet:<sup>1</sup>

$0$	Subskript zur Kennzeichnung der Anfangsparameter der Fahne an der Schornsteinmündung.
$v$	Subskript für die kartesischen Indizes $x,y,z$ eines Vektors.
$\sim$	Zeichenzusatz zur Kennzeichnung eines Umgebungswertes.
$A$	Querschnittsfläche der Fahne ( $\pi R^2$ ).
$c_p$	Spezifische Wärmekapazität trockener Luft bei konstantem Druck (1004.1 J/(kg K)).
$D$	Durchmesser der Fahne ( $2R$ ).
$E$	Einmischfunktion.
$f$	Abbruchfaktor zur Bestimmung der Endüberhöhung.
$f_{\text{red}}$	Reduktionsfaktor zur Berücksichtigung von <i>stacktip downwash</i> .
$F_r$	Densimetrische Froude-Zahl.
$g$	Erdbeschleunigung (9.8066 m/s <sup>2</sup> ).
$h$	Höhe der Fahnenachse über der Schornsteinmündung (Fahnenüberhöhung).
$h_f$	Endüberhöhung (Differenz zwischen Endhöhe der Fahnenachse und der Schornsteinhöhe).
$h_v$	Verdampfungsenthalpie (2454.3 kJ/kg).
$H_a$	Höhe über Grund, in der Windgeschwindigkeit und Windrichtung vorgegeben werden.
$H_s$	Höhe der Schornsteinmündung über Grund.
$H_T$	Höhe über Grund, in der die Umgebungstemperatur vorgegeben wird (Standard 2 m).
$K$	Verhältnis zwischen Austrittsgeschwindigkeit und Windgeschwindigkeit an der Schornsteinmündung.
$K_{\text{krit}}$	Kritischer Wert von $K$ für die Festlegung von $f_{\text{red}}$ .
$m$	Masse feuchter Luft in einem Volumenelement $V$ ( $m = m_d + m_v + m_l$ ).
$m_d$	Masse trockener Luft in einem Volumenelement $V$ .
$m_l$	Masse Flüssigwasser in einem Volumenelement $V$ .
$m_v$	Masse Wasserdampf in einem Volumenelement $V$ .
$M$	Abkürzung für den Massenfluss $A\rho u$ .
$p$	Druck.
$p_0$	Druck am Erdboden (Standard 101300 Pa).

<sup>1</sup>Zur deutlicheren Unterscheidung sind Höhen über Grund mit einem Großbuchstaben und Höhen, die sich auf das Niveau der Schornsteinmündung beziehen, mit einem Kleinbuchstaben gekennzeichnet.



$q$	Spezifischer Wasserdampfgehalt, spezifische Feuchte (Masse Wasserdampf pro Gesamtmasse, $q = m_v/m$ ).
$q_s$	Spezifischer Wasserdampfgehalt bei Sättigung.
$r$	Windrichtung.
$r_a$	Windrichtung in Höhe $h_a$ .
$R$	Radius der Fahne.
$R_d$	Gaskonstante von trockener Luft ( $R_d = 287.05 \text{ J}/(\text{kg K})$ ).
$R_v$	Gaskonstante von Wasserdampf ( $R_v = 461.52 \text{ J}/(\text{kg K})$ ).
$R_M$	Abgasvolumenstrom bei Betriebsbedingungen.
$\tilde{R}$	Relative Feuchte der Umgebungsluft.
$s$	Wegstrecke eines Volumenelementes entlang der Fahnenachse.
$t_s$	Transportzeit eines Volumenelementes.
$t_{1/2}$	Transportzeit eines Volumenelementes, in der die halbe Endüberhöhung erreicht wird.
$T$	Temperatur.
$T_a$	Umgebungstemperatur in Höhe $H_T$ (Standard $10^\circ\text{C}$ ).
$T_s$	Abklingzeit für die Zusatzgeschwindigkeit $v_0$ in einem Partikelmodell.
$u$	Betrag der Geschwindigkeit.
$u_*$	Schubspannungsgeschwindigkeit.
$\mathbf{u}$	Geschwindigkeitsvektor.
$u_a$	Windgeschwindigkeit in Höhe $H_a$ .
$v_0$	Vertikale Zusatzgeschwindigkeit in einem Partikelmodell.
$w$	Betrag der Relativgeschwindigkeit zwischen Fahne und Umgebungsluft.
$\mathbf{w}$	Vektor der Relativgeschwindigkeit zwischen Fahne und Umgebungsluft.
$w_{\parallel}$	Betrag der Komponente von $\mathbf{w}$ parallel zur Fahnenachse.
$w_{\perp}$	Betrag der Komponente von $\mathbf{w}$ senkrecht zur Fahnenachse.
$V$	Volumenelement.
$W$	Volumenanteil Wasserdampf in Prozent.
$x$	Wasserbeladung (Masse Wasserdampf und Flüssigwasser pro Masse trockener Luft, $x = (m_v + m_l)/m_d$ ).
$X$	X-Koordinate der Fahnenachse als Funktion von $s$ .
$Y$	Y-Koordinate der Fahnenachse als Funktion von $s$ .
$Z$	Z-Koordinate der Fahnenachse als Funktion von $s$ .
$\alpha$	Konstante in der Definition der Einmischfunktion ( $\alpha = 0.15$ ).
$\beta$	Konstante in der Definition der Einmischfunktion ( $\beta = 0.6$ ).
$\epsilon$	Abkürzung für den Einmischterm $2\pi\tilde{\rho}E$ .



- $\eta$  Spezifischer Flüssigwassergehalt (Masse kondensierter Wasserdampf pro Gesamtmasse,  $\eta = m_l/m$ ).
- $\gamma$  Konstante in der Definition der Einmischfunktion ( $\gamma = 0.38$ ).
- $\sigma_{0;u,v,w}$  Standardabweichungen von  $v_0$  in einem Partikelmodell.
- $\zeta$  Spezifischer Gesamtwassergehalt ( $\zeta = q + \eta = (m_v + m_l)/m$ ).
- $\rho$  Dichte feuchter Luft ( $\rho = m/V$ ).

## 4 Berechnung der Abgasfahnenüberhöhung

Für die Berechnung des Fahnenverlaufs ist das in JANICKE & JANICKE (2001) beschriebene Überhöhungmodell zu verwenden, das im folgenden mit *PLURIS* bezeichnet wird (*plume rise*).

### 4.1 Überhöhungmodell

Das Modell *PLURIS* beschreibt die Dynamik der Fahne anhand von über den Fahnenquerschnitt  $A$  gemittelten Kenngrößen der Fahne (integrales Fahnenmodell) und Differentialgleichungen, die sich aus den Erhaltungssätzen von Masse, Impuls, Wassergehalt und Enthalpie ergeben. Die Fahnenachse wird formal in die Mitte der als Kreis mit Durchmesser  $D$  angenommenen Querschnittsfläche  $A$  gelegt.

Das System von gekoppelten Differentialgleichungen liefert in stark vereinfachten Grenzfällen die sogenannten Briggs-Gleichungen (BRIGGS, 1975), mit denen der Verlauf der Fahnenachse analytisch beschrieben wird. Im allgemeinen Fall ist die Lösung nur numerisch möglich. Das Ergebnis sind der stationäre, dreidimensionale Verlauf der Fahnenachse und die Kenngrößen der Fahne entlang des Weges  $s$  auf der Fahnenachse.

#### 4.1.1 Modellgleichungen

Das Modell ist durch folgende Festlegungen und Erhaltungsgleichungen definiert.

1. Betrag der Relativgeschwindigkeit  $w = \tilde{u} - u$  zwischen Umgebungsluft und Fahne sowie ihre Komponenten parallel und senkrecht zur Fahnenachse:

$$w = \left[ u^2 + \tilde{u}^2 - 2 \sum_v u_v \tilde{u}_v \right]^{1/2} \quad (1)$$

$$w_{\parallel} = u^{-1} \sum_v u_v \tilde{u}_v - u \quad (2)$$

$$w_{\perp} = \left[ \tilde{u}^2 - \left( u^{-1} \sum_v u_v \tilde{u}_v \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$



2. Froude-Zahl:

$$F_r^2 = \frac{\tilde{\rho} u^2}{|\tilde{\rho} - \rho| g R} \quad (4)$$

$$g = 9.8066 \text{ m/s}^2.$$

3. Einmischfunktion:

$$E = R \left( \frac{\alpha w_{\parallel}^2}{2 w} + \beta \frac{w_{\perp}^2}{w} \right) + Ru \frac{\gamma}{F_r^2} \quad (5)$$

$$\alpha = 0.15, \beta = 0.6, \gamma = 0.38.$$

4. Dichte feuchter Luft:

$$\rho = \frac{p}{R_d T} \left[ \frac{1}{1 - \zeta + (R_v/R_d)q} \right] \quad (6)$$

$$R_d = 287.05 \text{ J/(kg K)}, R_v = 461.52 \text{ J/(kg K)}.$$

5. Abkürzungen:

$$M = A \rho u \quad (7)$$

$$\epsilon = 2\pi \tilde{\rho} E \quad (8)$$

6. Erhaltungsgleichung für die Masse:

$$\frac{d}{ds} M = \epsilon \quad (9)$$

7. Erhaltungsgleichung für den Impuls:

$$\frac{d}{ds} (M u_v) = \epsilon \tilde{u}_v + \delta_{v,z} A g (\tilde{\rho} - \rho) \quad (10)$$

8. Erhaltungsgleichung für die Enthalpie:

$$\frac{d}{ds} \left[ M \left( T - \frac{h_v}{c_p} \eta \right) \right] = -M \frac{g}{c_p} \frac{u_z}{u} \frac{\tilde{\rho}}{\rho} + \epsilon \left( \tilde{T} - \frac{h_v}{c_p} \tilde{\eta} \right) \quad (11)$$

$$h_v = 2454.3 \text{ kJ/kg}, c_p = 1004.1 \text{ J/(kg K)}.$$

9. Erhaltungsgleichung für den Gesamtwassergehalt:

$$\frac{d}{ds} (M \zeta) = \epsilon \tilde{\zeta} \quad (12)$$



10. Bewegungsgleichungen für die Koordinaten der Fahnenachse und der Transportzeit:

$$\frac{d}{ds}X = \frac{u_x}{u} \quad (13)$$

$$\frac{d}{ds}Y = \frac{u_y}{u} \quad (14)$$

$$\frac{d}{ds}Z = \frac{u_z}{u} \quad (15)$$

$$\frac{d}{ds}t_s = \frac{1}{u} \quad (16)$$

Das gekoppelte Gleichungssystem (9), (10), (11) und (12) wird numerisch integriert (z.B. mit dem Verfahren nach Runge-Kutta), im gleichen Zug wird der räumliche Verlauf der Fahnenachse und die Transportzeit über die Gleichungen (13) bis (16) bestimmt.

Nach jedem Integrationsschritt ergeben sich aus den Gleichungen (9) und (10) die Geschwindigkeit der Fahne und die Richtung der Fahnenachse an der neuen Position  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Aus den Gleichungen (11) und (12) folgen Fahnentemperatur und spezifischer Gesamtwasser- und Flüssigwassergehalt. Aus diesen Kenngrößen wird die Dichte der Fahne nach Gleichung (6) und schließlich aus dem Wert von  $M$  der Fahnenradius bestimmt. Die meteorologischen Parameter werden für die neue Position bestimmt und für den nächsten Integrationsschritt übernommen. Während der Integration wird der Verlauf  $h(t_s)$  für die spätere Auswertung vermerkt (siehe Abschnitt 4.3).

#### 4.1.2 Weitere Festlegungen

Als Anfangsparameter ( $s = 0$ ) sind die Austrittshöhe  $H$  (Höhe der Schornsteinmündung über Grund), der innere Durchmesser  $D_0$  der Austrittsfläche an der Schornsteinmündung und die über die Austrittsfläche gemittelten Werte der Abgasgeschwindigkeit  $u_0$ , der Abgastemperatur  $T_0$ , des spezifischen Wasserdampfgehalts (Feuchte)  $q_0$  und des spezifischen Flüssigwassergehalts  $\eta_0$  des Abgases vorzugeben.

Alternativ zu Feuchte und Flüssigwassergehalt kann die Wasserbeladung  $x_0$  angegeben werden. Für Definitionen und Umrechnungen siehe Abschnitt 6.

Die Berechnung der spezifischen Feuchte ist gemäß *Bericht zur Umweltphysik* Nr. 9 (JANICKE ET AL., 2017), Ende Abschnitt 4.2.5, vorzunehmen.

Die im Fall feuchter Fahnen implizite Berechnung von Fahnentemperatur und spezifischem Flüssigwassergehalt aus Gleichung (11) ist nach *Bericht zur Umweltphysik* Nr. 9, Gleichung (4.42), ohne Ansatz eines Ähnlichkeitsprofils durchzuführen.

Die numerische Integration der Differentialgleichungen ist standardmäßig mit einer Schrittweite von nicht mehr als  $D_0/10$  durchzuführen. In größerer Entfernung kann die Schrittweite größer gewählt werden.

## 4.2 Meteorologische Profile

Es sind die Vertikalprofile von Windgeschwindigkeit und Windrichtung,  $\tilde{u}(z)$  und  $\tilde{r}(z)$ , sowie die als höhenunabhängig angenommene Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_*$  am Ort des Schornsteins vorzugeben.

Beim Einsatz des Überhöhungsmodells in einer Ausbreitungsrechnung sind diejenigen Profile von Windgeschwindigkeit und Windrichtung und diejenige Schubspannungsgeschwindigkeit zu verwenden, die am Ort des Schornsteins in der Ausbreitungsrechnung Anwendung finden.

Ansonsten können die Profile nach der analytischen Lösung in Richtlinie VDI 3783 Blatt 8 (2017) festgelegt werden. Vorzugeben sind in diesem Fall die Rauigkeitslänge, die Verdrängungshöhe, die Obukhov-Länge und die Werte von Windgeschwindigkeit  $u_a$  und Windrichtung  $r_a$  in einer Höhe  $H_a$ . Die Schubspannungsgeschwindigkeit folgt hieraus.

Das Vertikalprofil der Temperatur  $\tilde{T}(z)$  ist am Ort des Schornsteins nach Richtlinie VDI 3783 Blatt 8 (2017) festzulegen. Oberhalb der Höhe 200 m über Grund ist der Temperaturgradient auf  $-0.0085$  K/m zu setzen. Der Wert der Temperatur in der Höhe  $H_T = 2$  m über Grund kann vorgegeben werden, der Standardwert ist  $T_a = 10^\circ\text{C}$ .

Für den Druck ist der Bodenwert  $p_0 = 101300$  Pa anzusetzen. Das Druckprofil ist aus dem Temperaturprofil wie folgt zu bestimmen (barometrische Höhenformel):

$$p(z) = p_0 \exp\left[-\frac{g}{R_d} \int_0^z \frac{1}{T(z')} dz'\right] \quad (17)$$

Die relative Feuchte der Umgebungsluft in der Höhe  $H_T = 2$  m über Grund ist auf  $\tilde{R} = 70\%$  zu setzen und hieraus der spezifische Wasserdampfgehalt zu bestimmen. Dieser Wert ist für alle Höhen anzusetzen. Für die Umgebungsluft wird kein Flüssigwasser (kondensierter Wasserdampf) angenommen.

Die meteorologischen Profile werden in der Regel für diskrete Höhenwerte vorgegeben. Beim Einsatz in einer Ausbreitungsrechnung kann hierfür das Vertikalraster, das in der Ausbreitungsrechnung verwendet wird, übernommen werden. Zwischen den Höhen, für die gültige Werte vorliegen, ist linear zu interpolieren, jenseits sind die Werte konstant zu halten.

Die vorgegebenen Höhenwerte müssen mindestens den Bereich von 0 m bis 800 m über Grund abdecken und sollten für die Festlegung des Temperaturprofils die Höhe 200 m über Grund enthalten.

## 4.3 Endüberhöhung

Zur einfachen Ankopplung des Überhöhungsmodells an ein Ausbreitungsmodell ist die Festlegung einer Endüberhöhung erforderlich. Bei hinreichend stabiler atmosphärischer Temperaturschichtung geht die Fahne in eine horizontale Schwerewelle über und die Endüberhöhung ergibt sich unmittelbar. Bei indifferenter und labiler Schichtung steigt die Fahne jedoch im Prinzip

immer weiter nach oben, da keine rücktreibende Kraft wirkt. In diesem Fall ist ein Abbruchkriterium erforderlich, das im Rahmen einer physikalisch begründeten Konvention festlegt, wann die Endüberhöhung als erreicht angesehen wird.

Für das Abbruchkriterium wird der Betrag der Relativgeschwindigkeit zwischen Fahne und Umgebungsluft  $w$  mit den charakteristischen Geschwindigkeitsfluktuationen der Umgebungsluft, die proportional zur Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_*$  gesetzt werden, verglichen. Ist  $w$  von vergleichbarer Größe wie  $u_*$ , dann hat die Fahne ihre dynamische Eigenständigkeit im wesentlichen verloren und es ist gerechtfertigt, im Rahmen einer Ausbreitungsrechnung den weiteren Fahnenanstieg zu vernachlässigen (siehe auch Richtlinie VDI 3945 Blatt 3, Anhang C). Ein einfacher Ansatz für den Abbruch der Fahnenberechnung lautet also

$$w < f u_* \quad (18)$$

mit einem empirischen Faktor  $f$ .

Es sollte ein weiterer Aspekt berücksichtigt werden: Im Überhöhungsmodell werden die realen Verhältnisse idealisiert abgebildet. Kleine Unterschiede in den Eingangsgrößen können sich im Modell zu großen Änderungen der Fahnenachse aufintegrieren, wenn der zeitliche Verlauf nur lang genug verfolgt wird. Tatsächlich sind die meteorologischen Bedingungen aber nicht konstant, sondern ändern sich räumlich und zeitlich während des Transports. Diese Schwankungen, die mit dem Betrachtungszeitraum zunehmen, verstärken tendenziell das Aufbrechen der Fahne. Dies kann durch Ansatz einer effektiven Schubspannungsgeschwindigkeit, die mit der Transportzeit  $t$  zunimmt, berücksichtigt werden, etwa in der Form

$$w < f \hat{u}_* \quad \text{mit} \quad \hat{u}_* = u_* \left( \frac{\max(t, T)}{T} \right)^a \quad (19)$$

und noch festzulegenden Werten für die Zeitskala  $T$  und den Exponenten  $a$ . Für Zeiten  $t < T$  ist  $\hat{u}_* = u_*$ . Greift das Abbruchkriterium in diesem Bereich, ergibt sich dieselbe Endüberhöhung wie mit dem einfachen Kriterium (18). Für Zeiten  $t > T$  wird  $\hat{u}_*$  stetig größer als  $u_*$  und die berechnete Endüberhöhung kleiner als nach dem Kriterium (18).

Damit lautet das Abbruchkriterium

$$w < f u_* \left( \frac{\max(t, T)}{T} \right)^a \quad (20)$$

Die Endüberhöhung  $h_f$  ist die bei Abbruch erreichte Überhöhung  $h$ . Es werden folgende Parameterwerte festgelegt:

- $a = 0.18$  Dieser Wert entspricht der Abhängigkeit der Geschwindigkeitsfluktuationen  $\sigma_{u,v}$  von der Mittelungszeit nach Richtlinie VDI 3783 Blatt 8 (2017).
- $T = 120 \text{ s}$  Tests und Vergleiche legen einen Wert im Bereich von etwa 100 Sekunden bis 200 Sekunden nahe. Der Wert 120 s (2 Minuten) ist eine einfache, damit verträgliche Konvention.
- $f = 1.3$  Dieser Wert wurde aus verschiedenen Vergleichen und Validierungen ermittelt, siehe *Bericht zur Umweltphysik* Nr. 9 (JANICKE ET AL., 2017), Abschnitt 4.7 sowie der Anhang des vorliegenden Berichtes.

Die Schubspannungsgeschwindigkeit  $u_*$  wird in der Regel aus Bodenmessungen bestimmt, entweder direkt oder aus dem gemessenen Wert von  $u_a$  in Höhe  $H_a$  und dem theoretischen Profil der Windgeschwindigkeit.

In der Praxis ist es sinnvoll, den in Gleichung (20) eingesetzten Wert von  $u_*$  auf einen Minimalwert zu beschränken. Das gilt insbesondere für sehr stabile Schichtung bei sehr niedriger Bodenrauigkeit. Der Minimalwert wird in Anlehnung an Richtlinie VDI 3783 Blatt 8 (2017) auf 0.05 m/s gesetzt, in Gleichung (20) ist also der Wert  $\max(0.05 \text{ m/s}, u_*)$  einzusetzen.

Für die Berechnung der Schornsteinhöhe nach dem Entwurf der TA Luft (Verfahren BESMIN) ist  $f = 1.7$  und  $T \rightarrow \infty$  zu setzen, also das Kriterium  $w < 1.7u_*$  zu verwenden. Damit wird in einem in Bezug auf die Immission konservativen Ansatz die Zunahme der effektiven Schubspannungsgeschwindigkeit auf einer Zeitspanne  $t$  von 10 Minuten durch einen erhöhten Wert von  $f$  vorweggenommen (siehe auch *Bericht zur Umweltphysik* Nr. 9, 2017, Abschnitt 2.3).

In Ergänzung zum Abbruchkriterium ist die Endüberhöhung auf eine maximale Höhe der Fahnenachse von 800 m über Grund zu beschränken.

#### 4.4 Stacktip downwash

In Lee des Schornsteins bildet sich kurz unterhalb der Schornsteinmündung ein Unterdruckgebiet aus, das zu einer Einmischung eines Teils der Abgasfahne und damit zu einer Reduzierung des Anstiegs der Fahnenachse führen kann (*stacktip downwash*).

Der Reduktion der Abgasfahnenüberhöhung durch *stacktip downwash* ist durch Multiplikation der berechneten Endüberhöhung mit dem Faktor

$$f_{\text{red}} = \min(1, K/K_{\text{krit}}) \quad (21)$$

zu berücksichtigen mit dem Geschwindigkeitsverhältnis an der Schornsteinmündung

$$K = \frac{u_0}{\tilde{u}(H)} \quad (22)$$

und dem kritischen Wert

$$K_{\text{krit}} = \frac{1.5}{1 + 2F_{r,0}^{-2/3}} \quad (23)$$

mit der Froude-Zahl an der Schornsteinmündung  $F_{r,0}$ .

Für Werte von  $K$  größer als der kritische Wert  $K_{\text{krit}}$  wird somit *stacktip downwash* vernachlässigt ( $f_{\text{red}} = 1$ ). Das ist insbesondere der Fall, wenn die aktuelle Austrittsgeschwindigkeit  $u_0$  wesentlich größer als die aktuelle Windgeschwindigkeit in Schornsteinhöhe  $\tilde{u}(H)$  ist. Für kleinere Austrittsgeschwindigkeiten wird die Abgasfahnenüberhöhung reduziert, aber nicht völlig vernachlässigt.

## 4.5 Parameter für die Ausbreitungsrechnung

In Ausbreitungsrechnungen, in denen die Abgasfahnenüberhöhung durch Heraufsetzung der Emissionshöhe um die Endüberhöhung (effektive Emissionshöhe) berücksichtigt wird, kann die Endüberhöhung

$$h_{f,\text{red}} = f_{\text{red}} h_f \quad (24)$$

(siehe Abschnitte 4.3 und 4.4) direkt übernommen werden.

In einem Partikelmodell nach Richtlinie VDI 3945 Blatt 3 (2000) kann durch Vorgabe einer vertikalen Zusatzgeschwindigkeit  $v_0$  der Partikel und einer Zeitkonstanten  $T_s$ , mit der diese exponentiell abklingt, nicht nur die Endüberhöhung abgebildet, sondern auch der berechnete Verlauf der Fahnenachse näherungsweise berücksichtigt werden.

Der gesamte Vertikalversatz der Partikel aufgrund der Zusatzgeschwindigkeit ist das Produkt  $v_0 T_s$ . Dieser Versatz muss gleich der Endüberhöhung  $h_{f,\text{red}}$  sein. Zusätzlich wird gefordert, dass die Partikel die halbe Endüberhöhung in derselben Zeit  $t_{1/2}$  erreichen, wie sie vom Überhöhungsmodell bestimmt wird.

Von dem Überhöhungsmodell sind also die Werte  $h_f$  und  $t_{1/2}$  zu bestimmen, zusätzlich ist der Wert  $f_{\text{red}}$  zu berechnen. Die Modellparameter  $v_0$  und  $T_s$  lauten dann:

$$T_s = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \quad (25)$$

$$v_0 = \frac{f_{\text{red}} h_f}{T_s} \quad (26)$$

## 5 Fahneninduzierte Turbulenz

Durch den Geschwindigkeitsunterschied zwischen Fahne und Umgebungsluft wird Umgebungsluft in die Fahne eingemischt und der Fahnendurchmesser vergrößert.

Diese Aufweitung durch fahneninduzierte Turbulenz kann in einem Partikelmodell nach Richtlinie VDI 3945 Blatt 3 (2000) durch eine Varianz der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  parametrisch berücksichtigt werden.

Die Standardabweichungen  $\sigma_{0;u,v,w}$  von  $v_0$  sind auf den Wert  $0.1v_0$  zu setzen. Sie werden mit derselben Zeitkonstanten  $T_s$  wie  $v_0$  abgebaut. Die dadurch bedingte Aufweitung der Fahne – neben der durch die übliche atmosphärische Turbulenz bedingten – ist  $\sigma_{0;u,v,w} T_s$ , mit dem hier festgelegten Wert also 10% der Endüberhöhung.

## 6 Umrechnungen

Der Abgasvolumenstrom  $R_M$  bei Betriebsbedingungen ist das Produkt

$$R_M = Av_0 \quad (27)$$

Hierbei ist  $A$  die Innenfläche an der Schornsteinmündung senkrecht zur Abgasströmung und  $v_0$  die über  $A$  gemittelte Austrittsgeschwindigkeit des Abgases.

Die Beziehung zwischen der Fläche  $A$  und dem zu ihr äquivalenten Durchmesser  $D_0$  lautet:

$$D_0 = \sqrt{\frac{4}{\pi}A} \quad (28)$$

Aus gegebenen Werten von  $R_M$  und  $A$  ergibt sich die Austrittsgeschwindigkeit  $v_0$  zu:

$$v_0 = \frac{R_M}{A} \quad (29)$$

Aus der spezifischen Wasserbeladung  $x$  (Masse Wasserdampf und Flüssigwasser pro Masse trockener Luft) wird die spezifische Feuchte  $q$  (Masse Wasserdampf pro Masse feuchter Luft) und der spezifische Flüssigwassergehalt  $\eta$  bei Kenntnis der Sättigungfeuchte  $q_s$  wie folgt bestimmt:

$$q = \min\left(q_s, \frac{x}{1+x}\right) \quad (30)$$

$$\eta = \max\left(0, \frac{x}{1+x} - q_s\right) \quad (31)$$

Liegt kein Flüssigwasser vor ( $\eta = 0$ ), dann kann die spezifische Wasserbeladung  $x$  aus dem Volumenanteil von Wasserdampf  $W$ , angegeben in Prozent, wie folgt bestimmt werden:

$$x = 0.622 \frac{(W/100)}{1 - (W/100)} \quad \text{für } \eta = 0 \quad (32)$$



## Literatur

### Technische Regeln und Lehrbücher

VDI 3782 Blatt 3 (1985): *Umweltmeteorologie; Ausbreitung von Luftverunreinigungen in der Atmosphäre; Berechnung der Abgasfahnenüberhöhung*. Beuth Verlag, Berlin.

VDI 3783 Blatt 8 (2017): *Umweltmeteorologie; Messwertgestützte Turbulenzparametrisierung für Ausbreitungsmodelle*. Beuth Verlag, Berlin.

VDI 3784 Blatt 2 (1990): *Umweltmeteorologie; Ausbreitungsrechnung bei Ableitung von Rauchgasen über Kühltürme*. Beuth Verlag, Berlin.

VDI 3945 Blatt 3 (2000): *Umweltmeteorologie; Atmosphärische Ausbreitungsmodelle; Partikelmodell*. Beuth Verlag, Berlin.

Baehr, H.D., Kabelac, S.: *Thermodynamik*. Springer, Berlin, 2012.

### Fachartikel

Briggs, G.A. (1975): *Plume rise predictions*. In: Lectures on air pollution and environmental impact analyses. *Am. Met. Soc.*, 59-111.

Janicke, U., Janicke, L. (2001): *A three-dimensional plume rise model for dry and wet plumes*. *Atmospheric Environment* **35**, 877-890.

Janicke, U., Janicke, L., Bächlin, W., Flassak, T., Theurer, W., Trukenmüller, A. (2017): *Weiterentwicklung ausgewählter methodischer Grundlagen der Schornsteinhöhenbestimmung und der Ausbreitungsrechnung nach TA Luft*. *Berichte zur Umweltphysik*.

## Anhang

### A Vergleich mit dem Indianapolis-Datensatz

Der Datensatz *Indianapolis* ist einer der wenigen mit Feld-Konzentrationsmessungen von thermischen Abluffahnen. Er ist daher (trotz kritischer Fragen zur Interpretation der Daten, siehe *Berichte zur Umweltphysik* Nr. 9) für die Festlegung von Details der Überhöhungsmodellierung, insbesondere des Abbruchkriteriums, ein hilfreicher Vergleichsfall.

Im *Bericht zur Umweltphysik* Nr. 9 wird gezeigt, dass eine Ausbreitungsrechnung mit dem Partikelmodell *LASAT* in Kombination mit *PLURIS* zu einer wesentlich besseren Übereinstimmung mit den Messungen führt als *LASAT* in Kombination mit dem einfachen Überhöhungsmodell der bisherigen Richtlinie VDI 3782 Blatt 3 (1985). Bild A.1 gibt einen der Vergleiche wieder.

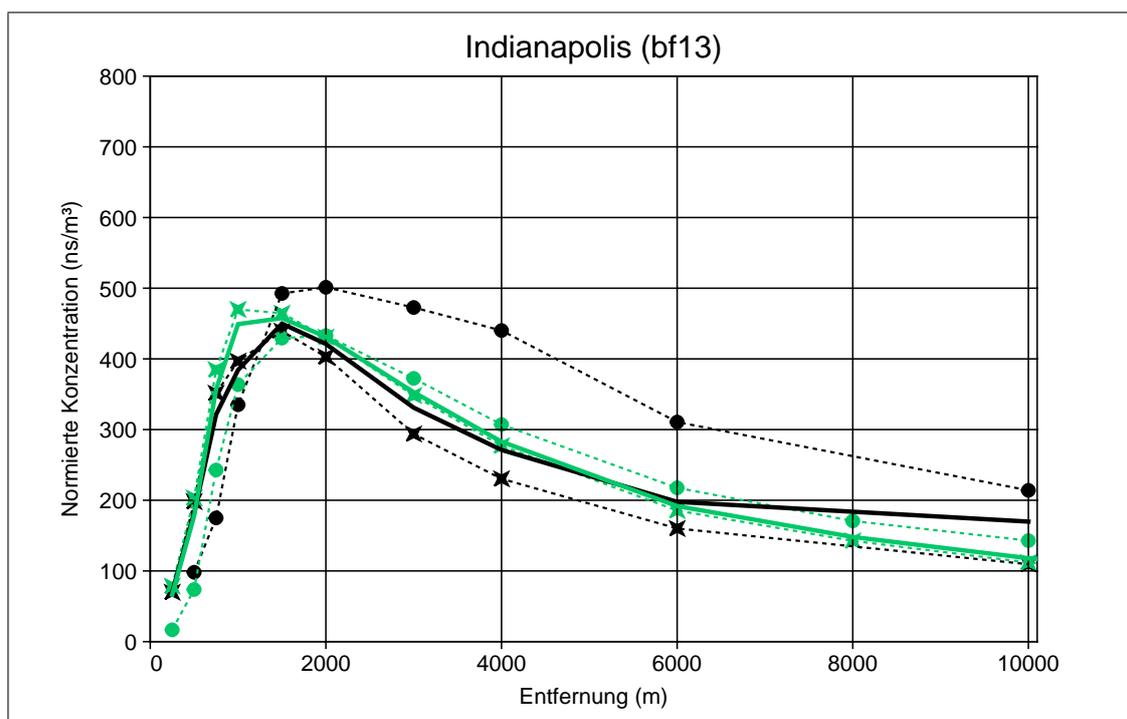


BILD A.1: Vergleich mit dem Indianapolis-Datensatz (Rechnung mit *LASAT* nach dem Entwurf TA Luft 2018 und dem Abbruchkriterium  $w < 1.3u_*$ ). Dargestellt ist der Verlauf der Maximalkonzentration als Funktion der Quellentfernung, in schwarz die Messdaten, in grün die Ergebnisse der Ausbreitungsrechnung. Die über die Stunden mit labiler bzw. indifferenter Schichtung gemittelten Ergebnisse sind als Symbole dargestellt (indifferente Schichtung: Kreise; labile Schichtung: Sterne), die mit einer gestrichelten Linie verbunden sind. Die durchgezogenen Linien ohne Symbole zeigen das Mittel über alle Stunden mit labiler oder indifferenter Schichtung.

Das Abbruchkriterium (20) mit Berücksichtigung der Transportzeit wurde unter anderem gewählt, weil mit dem einfacheren Ansatz  $w < 1.3u_*$  Situationen beobachtet wurden, insbesondere bei kleinen Rauigkeitslängen  $z_0$  und entsprechend kleinen Werten von  $u_*$ , in denen die berech-

nete Endüberhöhung empfindlich von äußeren Parametern abhängt, obwohl sich am Verlauf der berechneten Fahnenachse kaum etwas geändert.

Ein Beispiel ist folgende Situation: Quelle in 20 m Höhe, 2 m Durchmesser, 10 m/s Austrittsgeschwindigkeit und 30 Grad Celsius Austrittstemperatur für indifferente Schichtung mit der Obukhov-Länge 99999 m und einer Windgeschwindigkeit von 3 m/s in 10 m Höhe. Die folgende Tabelle zeigt die berechnete Endüberhöhung mit dem Ansatz  $w < 1.3u_*$  und mit dem Ansatz (20),  $w < 1.3\hat{u}_*(t)$ .

$z_0$	Überhöhung	
	$w < 1.3u_*$	$w < 1.3\hat{u}_*(t)$
0.05 m	239 m	54 m
0.1 m	47 m	37 m
0.2 m	24 m	23 m
0.5 m	17 m	17 m

Während der einfachere Ansatz  $w < 1.3u_*$  unphysikalisch sensibel auf den Wert der Rauigkeitslänge im Bereich kleiner Werte reagiert, zeigt der aktuelle Ansatz ein plausibleres Verhalten. Für größere Rauigkeitslängen liefern beide Ansätze für dieses Beispiel dasselbe Ergebnis.

Bild A.2 zeigt den Indianapolis-Vergleich mit dem Ansatz (20). Das Maximum ist etwas höher als mit dem einfacheren Ansatz, in größerer Entfernung zeigen sich aufgrund der starken Vertikalausdehnung der Fahne von einigen 100 m nur geringe Änderungen.

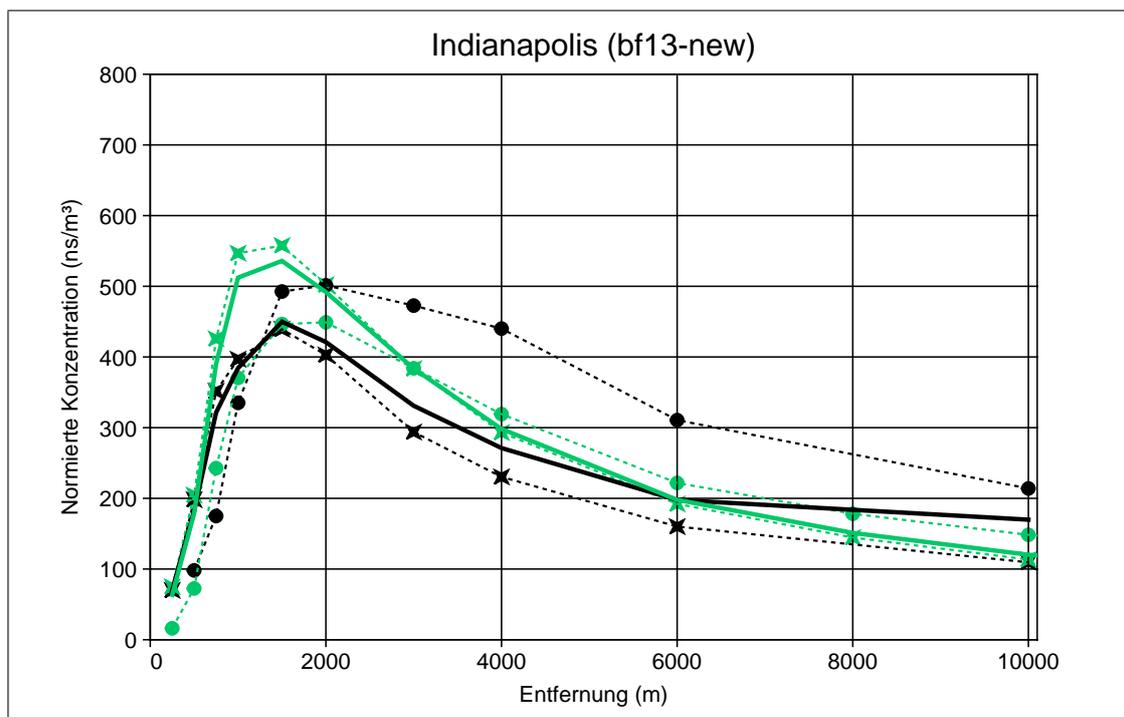


BILD A.2: Vergleich mit dem Indianapolis-Datensatz für den aktuellen Ansatz  $w < 1.3\hat{u}_*(t)$ .

In diesen Darstellungen wurde die Festlegung der Schichtungskategorie in Anlehnung an frühere Vergleiche anhand des Verhältnisses  $c = h_m/L$  mit der Mischungsschichthöhe  $h_m$  und der Obukhov-Länge  $L$  getroffen (beides im Messdatensatz vorgegeben,  $L$  in die Modellrechnung übernommen): labil für  $c < -1$ , stabil für  $c > 1$  und indifferent dazwischen. Die hier gezeigten Vergleiche schließen die stabile Kategorie aus, da die Messdaten Effekte aufweisen, die in einer Standardmodellierung nicht reflektiert werden.

Es fällt auf, dass das Modell für die indifferente Kategorie (Kreise) systematisch kleinere Konzentrationen als die Messung liefert. Eine Analyse zeigt, dass in den 17 Datensätzen dieser Kategorie 5 Datensätze mit Werten von  $L$  im Bereich 300 m bis 400 m sind, also eher stabile Schichtung. Entsprechend liefert das Modell ein Auftreffen der Fahne auf den Boden erst in einigen km Entfernung, während das in der Messung schon nach rund 1 km der Fall ist.

Eine Alternative ist, die Einteilung nach Schichtungskategorien gemäß Richtlinie VDI 3783 Blatt 8 (2017) anhand der Obukhov-Länge und der Rauigkeitslänge (1 m) vorzunehmen. Statt 70 labile, 17 indifferente und 55 stabile Fälle ergeben sich dann 48 labile, 36 indifferente und 58 stabile Fälle. Die entsprechende Auswertung ist in Bild A.3 dargestellt.

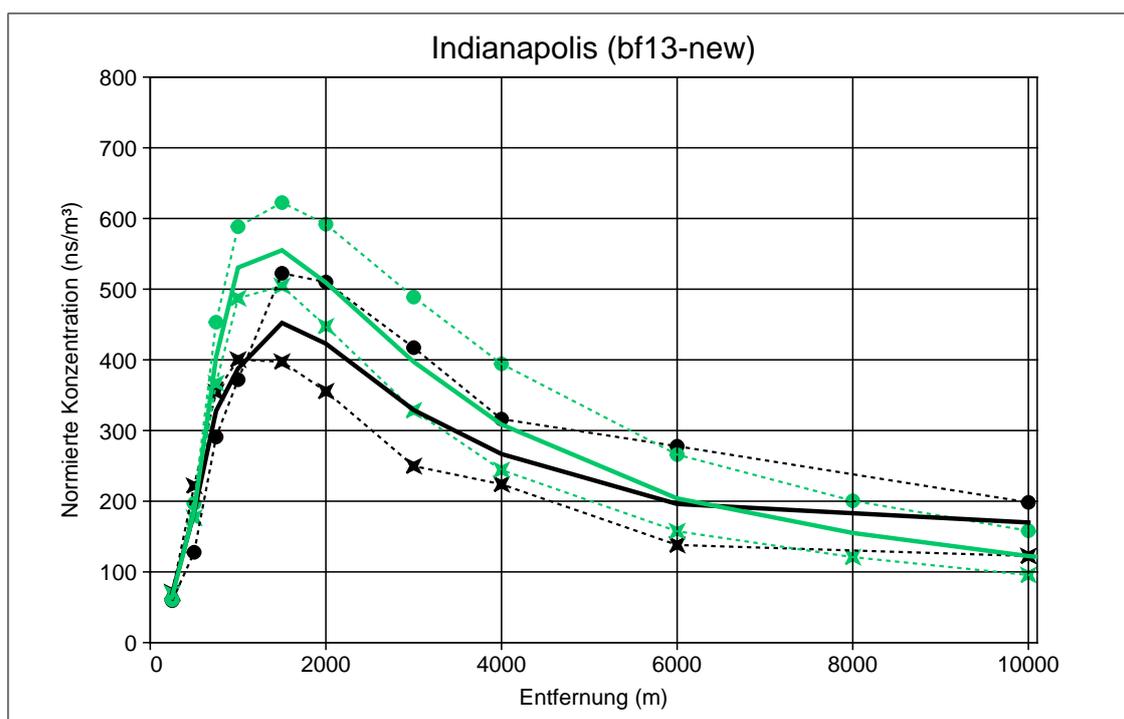


BILD A.3: Vergleich mit dem Indianapolis-Datensatz für den aktuellen Ansatz  $w < 1.3\hat{u}_*(t)$  und der Klasseneinteilung nach Richtlinie VDI 3783 Blatt 8 (2017).

An dem über labile und indifferente Kategorie gemittelten Ergebnis (durchgezogene Linie) ändert sich nur wenig, aber die Übereinstimmung für die jeweilige Kategorie fällt in größerer Entfernung besser aus.